

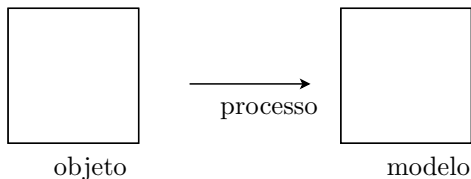
Matemática e Algoritmos das Dobras

Paulo Eduardo Azevedo Silveira

Orientador: Prof. Dr. José Coelho de Pina Jr.
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

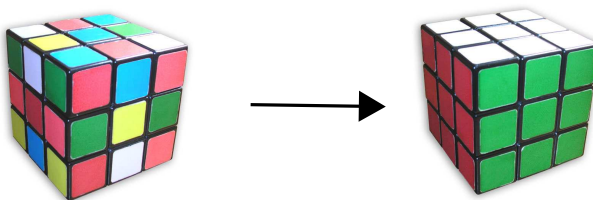
18 de maio de 2007

Problema Computacional



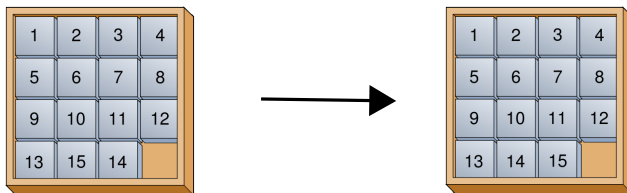
É possível? Algoritmo?

Rubik



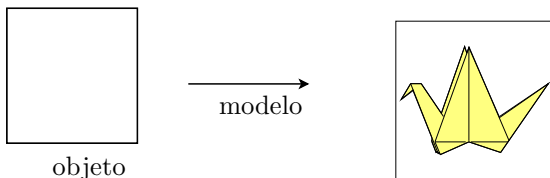
É possível? Algoritmo?

Quadrado mágico



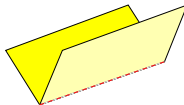
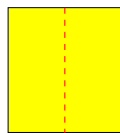
É possível? Algoritmo?

Origami Computacional

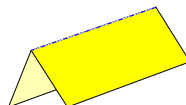


É possível? Algoritmo?

Operações básicas



vale



montanha

Operações básicas do processo de dobra.

Categorias

- Origami matemático
- Origami computacional
 - algoritmos eficientes
 - intratabilidade
 - resultados universais
- Origami tecnológico

Robert Lang, Demaines.

Origami Matemático

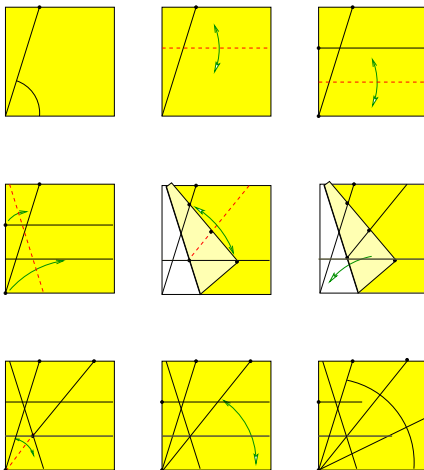
- Modelo das construções de Euclides
- Modelos de dobras de Huzita

Trisseção de ângulos

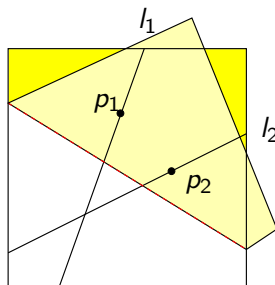
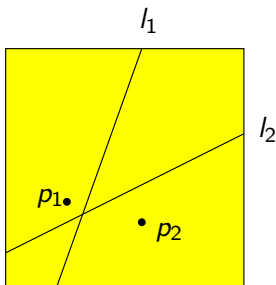
Problema $T_{\text{RISSEÇÃO}}(l_1, l_2)$: *Dados segmentos de reta $l_1 = ap$ e $l_2 = ab$, determinar um segmento de reta af tal que a medida do ângulo $\angle(f, a, b)$ seja $1/3$ da medida do ângulo $\angle(p, a, b)$.*

Euclides, Gauss, 17.

Trisseção de ângulos - Tsune Abe



Truque: Operação $O6$ de Huzita



Problema Deliano



Problema *DUPLICA-CUBO(I)*: *Dado um segmento l de comprimento a , construir um segmento de comprimento x tal que o cubo com arestas de comprimento x tenha o dobro de volume do cubo com arestas de comprimento a .*

$$x^3 = 2a^3$$

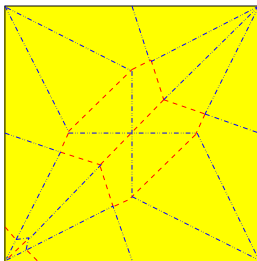
Além de outros problemas...

Outros problemas

- Construção de números racionais;
- Construção de números irracionais com erro ϵ ;
- Soluciona a equação $x^3 + ax^2 + bx + c$.

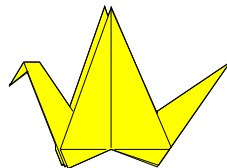
Teorema *Todas as construções factíveis no modelo de Euclides podem ser realizadas no modelo de dobras de Huzita. Mais especificamente, as construções E1-E5 podem ser simuladas pelas operações O1-O5.*

Planaridade



diagrama

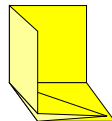
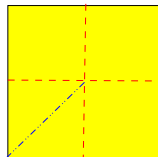
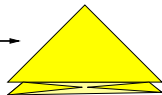
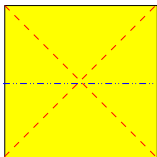
→
processo de
dobra



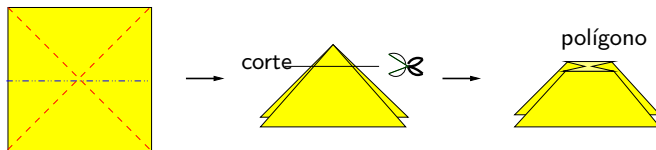
modelo

Problema $\text{RETILINEAR}(D)$: *um dado diagrama D corresponde a um modelo retilíneo?*

Planaridade

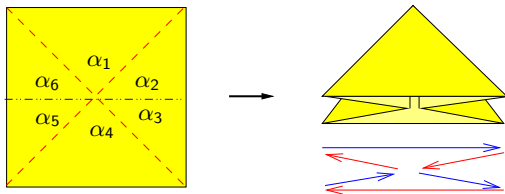


Teorema de Maekawa

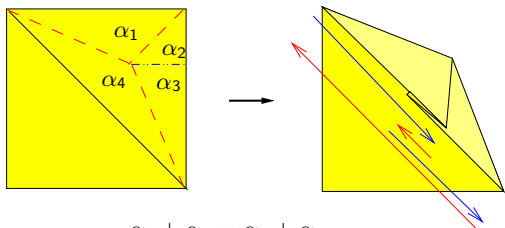


$$|M - V| = 2$$

Teorema de Kawasaki

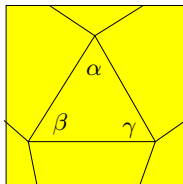


$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$$



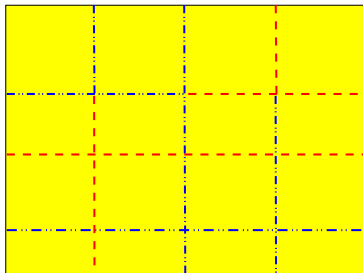
$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$$

Propriedades necessárias mas não suficientes



Conjectura, Hull.

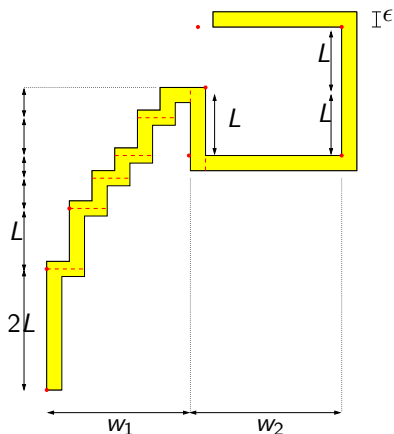
Mapa



Problema $\text{DOBRA-MAPA}(M)$: *dado um mapa M , encontrar um processo de dobra simples que transforma M em um modelo plano.*

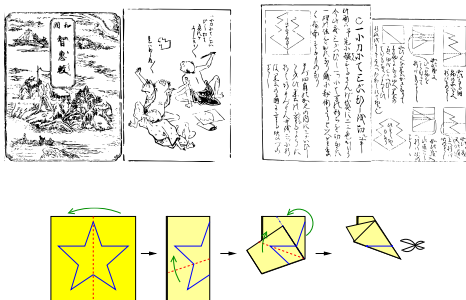
Arkin, Bender, Demaine, Demaine, Mitchell, Sethia, Skiena.
Origami 1D.

Nem sempre tão fácil



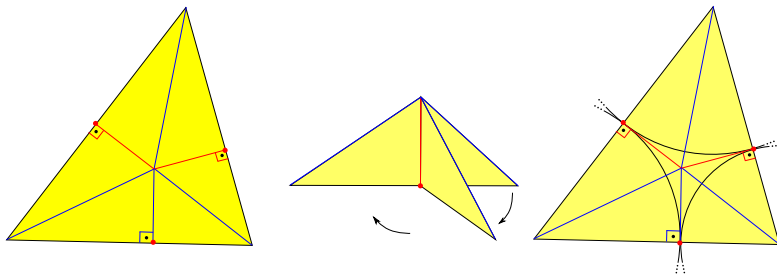
Simple porém difícil.

Problema

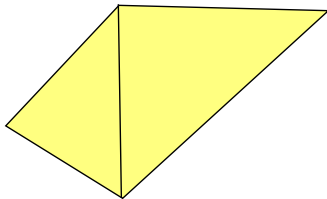


Problema DOBRAR-E-CORTAR-BOOLEANO(P, R):
 Dado um polígono simples P desenhado em um pedaço de papel retangular R , é **possível** dobrar o papel de tal forma que com apenas um “corte reto de tesoura” obtenhamos o polígono P ?

Triângulo

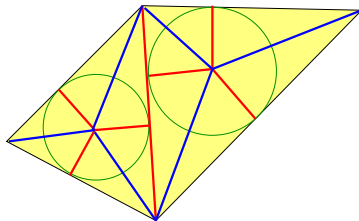


Quadriláteros



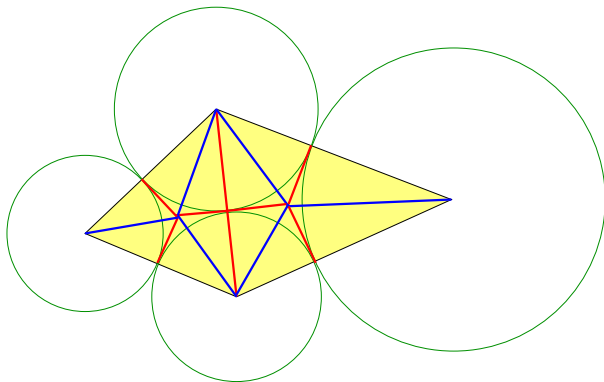
Como dobrar e cortar? Triangularizar?

Quadriláteros complicados



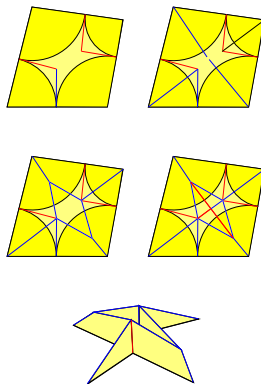
Desrespeita Maekawa. Como resolver?

Qual quadrilátero é bom para dobrar e cortar?



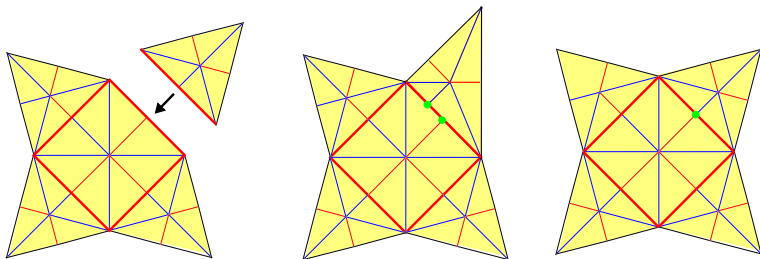
Discos propagam compatibilidade entre moléculas.

Nesga



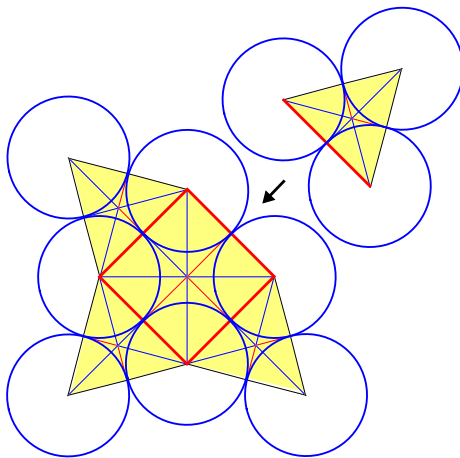
Quando não dá para usar duas orelhas do coelho.

Polígonos maiores

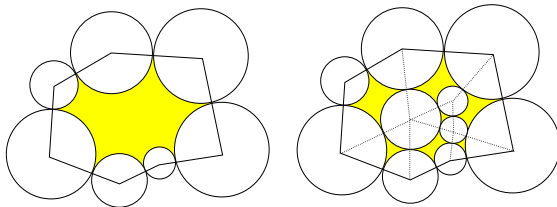


Nem sempre moléculas se encaixam.

Discos novamente propagam compatibilidade



Empacotamento de discos



Problema EMPACOTAR-DISCOS(P, R): *Dado um polígono simples P desenhado em uma folha de papel retangular R , obter um empacotamento de discos que cobre o polígono e a margem do papel e todas as fendas sejam 3-fendas e 4-fendas.*

Bern, Demaine, Eppstein, Hayes.

Solução por empacotamento de discos

Envolve

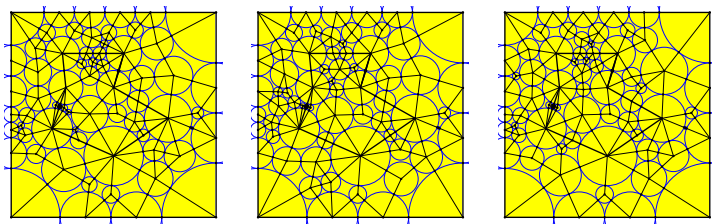
- Empacotamento de discos;
- Grafos, emparelhamento;
- Winged edge;
- Problema de Apolônio;
- Diagrama de Voronoi.

Considerações finais

Considerações finais

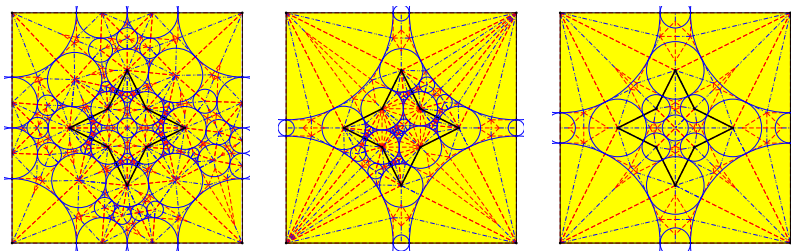
- Origami matemático
- Modelos planos
- Implementação e heurísticas
- Conversas com Robert Lang e Marshall Bern
- Próximos passos

Preenchimento dos buracos



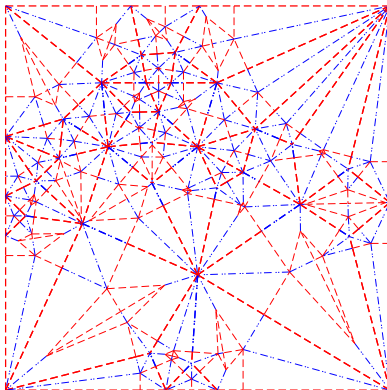
Discos utilizados para a quebra de uma fenda não ajudam muito.

Posição inicial dos discos

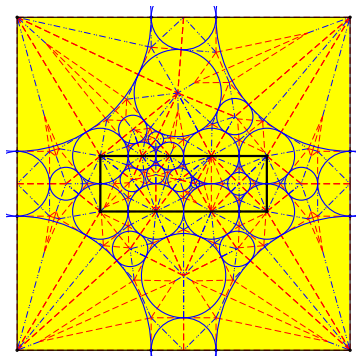


Posicionamento inicial dos discos mudam bastante o resultado.

Humanamente impossível...



...mesmo para os simples

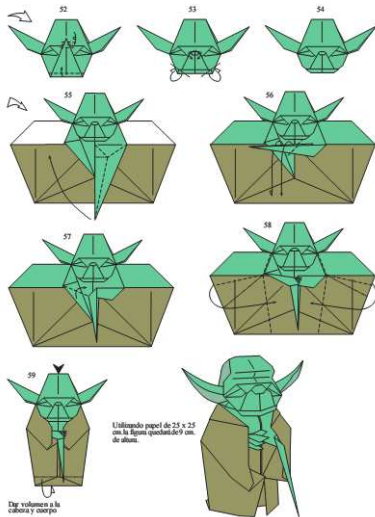


Resultado **ruim** para um polígono com eixos de simetria.

Próximos passos

Futuros trabalhos

- Implementação por esqueleto rígido;
- Aplicações práticas: air bag, telescópio, laser;
- Outras frentes algorítmicas: linkages, poliedros, construção de bases.



Obrigado!
Dúvidas, Comentários,
Sugestões
peas@ime.usp.br

Dificuldades no texto

- Nomenclatura (orelha do coelho, orelha de coelho)
- Preliminares (grafos, emparelhamento, coloração, Voronoi)
- Código da implementação no texto
- Pseudocódigo
- Algumas provas são por exaustão
- O_7 e completude
- Verificação das imagens (2.13, 2.14, 5.22)

Pontos complicados

- Precisão
- Hashes e empates